

CAPITOLO 1

Insiemistica e Sistemi di numerazione

La classificazione

Classificare significa ordinare una molteplicità di oggetti secondo due o più partizioni finalizzate; in tal modo ogni oggetto trova una precisa collocazione in una delle classi che sono state generate.

Per **criterio** s'intende una regola o norma che detta il modo di procedere o selezionare.

Un criterio **oggettivo** è chiaro ed univoco per tutti. Un'interrogazione su base oggettiva genera degli elenchi sempre uguali tra loro, anche se la domanda è posta a soggetti diversi.

Un criterio **soggettivo**, come dice la parola stessa, è legato alla persona singola e quindi non è utilizzabile in ambiente matematico. Un'interrogazione su base soggettiva genera elenchi diversi, anche se talvolta alcuni potranno essere uguali, a causa delle inevitabili differenze tra i soggetti indagati.

La **partizione casuale** è la suddivisione di un gruppo di oggetti che non tiene conto di un criterio predefinito.

La **partizione finalizzata** è una suddivisione di un gruppo di oggetti che tiene conto di un criterio predefinito.

La **classificazione funzionale** è una suddivisione di un gruppo di oggetti che tiene conto di due o più criteri, quindi due o più partizioni finalizzate.

Insiemistica

Il concetto di insieme è un concetto primitivo. Non è possibile, quindi, darne una sua definizione **esplicita**, ma si definisce un insieme in modo **implicito**, riferendosi agli oggetti che lo compongono. Nel linguaggio matematico è, comunque, importante definire in modo rigoroso e preciso un **insieme** in modo tale che si possa stabilire, in modo oggettivo, se un oggetto appartiene o non appartiene all'insieme.

Un insieme in senso matematico deve, quindi soddisfare ai seguenti tre criteri:

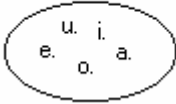
1. **oggettività**;
2. chiara **distinguibilità dei suoi elementi**;
3. **appartenenza** o meno di un qualsiasi elemento dato all'insieme.

Gli insiemi sono indicati con lettere maiuscole dell'alfabeto. Alcune lettere assumo in insiemistica e matematica un significato particolare e sono pertanto da ritenersi riservate (N = insieme dei numeri naturali; Q = insieme dei numeri razionali; ecc.).

Un **elemento** è uno dei componenti un insieme.

Gli elementi di un insieme sono indicati con lettere minuscole.

Un insieme si può rappresentare in tre modi diversi:

Per caratteristica descrivendone la proprietà caratterizzante i suoi elementi.	$A = \{x/x \text{ è una vocale}\}$ (si legge: <u>l'insieme A formato dagli elementi x tali che x è</u>)
Per elencazione riportando la lista degli elementi componenti	$B = \{a; e; i; o; u; e\}$
Graficamente con Eulero-Venn (<i>ellissi con rappresentati all'interno i diversi elementi</i>)	Eulero-Venn 

Esistono insiemi matematici finiti, infiniti e vuoti.

Un insieme si dice finito quando contiene un numero limitato di elementi.	$A = \{x/x \text{ è un alunno della 1A}\}$
Un insieme si dice infinito quando contiene un numero illimitato di elementi.	$B = \{x/x \text{ è un numero dispari}\}$
Un insieme si dice vuoto quando non contiene alcun elemento.	$C = \{x/x \text{ è un alunno alto più di 3 metri}\}$

Euler Leonard (1701-1783), nato a Basilea, fu matematico, fisico, astronomo e filosofo, ed è considerato lo scienziato più grande dopo la generazione di Newton. Fece studi importanti e introdusse una nuova teoria la "Teoria dei grafi".
Venn (1834-1923) matematico inglese diede un apporto geniale allo studio della logica matematica e sostituì i cerchi di Eulero a delle regioni ellittiche che meglio si prestano a rappresentare gli insiemi.

La **potenza** di un insieme, detta anche **cardinalità**, indica il numero di elementi in esso contenuti.
La potenza di un insieme s'indica con $n(A)$.

Insiemi **equipotenti** hanno lo stesso numero di elementi ($n(A) = n(B)$) e tra essi si può stabilire una corrispondenza biunivoca.

Due insiemi equipotenti si dicono invece uguali ($A = B$) se hanno gli stessi elementi.

Si ha quindi:

1. la cardinalità dell'insieme vuoto è zero

$$n(\emptyset) = 0$$

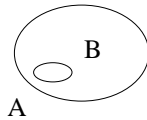
2. la cardinalità degli insiemi infiniti è infinito

$$n(N) = \infty$$

3. la cardinalità di tutti gli altri insiemi è un numero naturale

$$n(A) = a \quad \text{con } a \in N$$

Si dice che B è un **sottoinsieme** di un insieme A quando tutti gli elementi di B appartengono anche ad A.



esempio di sottoinsieme ($B \subset A$)

Si dice **sottoinsieme proprio** un sottoinsieme B di A che non coincide con A e non è vuoto.
Esempio: dato l'insieme N e l'insieme $P = \{x/x \text{ è un numero pari}\}$, allora ($P \subset A$)

Si dicono **sottoinsiemi impropri** di un insieme A, l'insieme A stesso ($A \subset A$) e l'insieme vuoto ($\emptyset \subset A$).

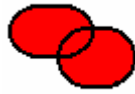
Si definisce **insieme delle parti** di un insieme A, e si indica con \mathcal{P}_A , l'insieme formato da tutti i possibili sottoinsiemi (propri e impropri) di A.

Esempio: dato l'insieme $A = \{a; b\}$ si ha $\mathcal{P}_A = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}\}$

*La teoria degli insiemi fu elaborata dal matematico tedesco **Georg Cantor** (1845-1918) e trovò subito notevole impulso nella matematica moderna. Dobbiamo a Cantor una nuova e rigorosa teoria dei numeri irrazionali, la dimostrazione classica dell'esistenza dei numeri trascendenti ed il postulato della continuità.*

Operazioni con gli insiemi

Unione



$$A \cup B$$

E' l'insieme formato da tutti gli elementi degli insiemi dati, presi quelli comuni una e una sola volta

Proprietà commutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

Proprietà associativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Proprietà distributiva rispetto all'intersezione

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Intersezione



$$A \cap B$$

E' l'insieme formato da tutti gli elementi comuni ai due insiemi.

Proprietà commutativa

$$A \cap B = B \cap A$$

Proprietà associativa

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Proprietà distributiva rispetto all'unione

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Insiemi privi di elementi comuni si dicono disgiunti: :

$$A \cap B = \emptyset \quad \text{insiemi disgiunti}$$

Differenza



$$A - B$$

L'insieme A-B (anche A/B) è formato da tutti gli elementi di A diversi da B

La differenza di insiemi uguali è l'insieme vuoto

$$A - A = \emptyset$$

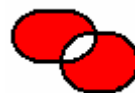
da cui si ha

$$A - \emptyset = A$$

La differenza tra insiemi non è commutativa

$$A - B \neq B - A$$

Differenza Simmetrica



$$A \Delta B$$

E' l'insieme formato da tutti gli elementi degli insiemi dati esclusi quelli comuni

La differenza simmetrica tra insiemi è commutativa

$$A \Delta B = B \Delta A$$

Complementazione

Stabilito un insieme universo cui fare riferimento si può calcolare il complemento ad un insieme, intendendo con questo gli elementi dell'universo che non appartengono all'insieme dato. L'insieme complementare si indica con la lettera maiuscola dell'insieme con un trattino sovrastante.

Insieme universo = (lettere alfabeto)
 allora $C(\text{vocali}) = (\text{consonanti})$

Prodotto cartesiano

A x B

serie di tutte coppie ordinate degli elementi di A e B:

$$A = \{a; b\} \quad B = \{1; 2\}$$

$$C = A \times B = \{(a;1); (a;2); (b;1); (b;2)\}$$

AxB	1	2
a	(a;1)	(a;2)
b	(b;1)	(b;2)

Il prodotto cartesiano non gode della proprietà commutativa:

$$A \times B \neq B \times A$$

Per definizione si ha:

$$A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$\emptyset \times \emptyset = \emptyset$$

Il prodotto cartesiano gode della proprietà distributiva:

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

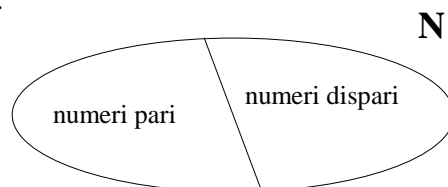
$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

Partizione di un insieme:

Si dice partizione di un insieme A l'insieme dei sottoinsiemi di A che soddisfano le tre seguenti condizioni

- ◆ nessun sottoinsieme vuoto;
- ◆ ogni elemento di A appartiene ad un solo sottoinsieme;
- ◆ l'unione dei sottoinsiemi coincide con A.

Esempio:



L'insieme unione dei sottoinsiemi delle parti dà l'insieme di partenza:

$$A = (P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n)$$

I simboli dell'insiemistica

$x x$	elementi x tali che x è un ...
A, B, C ...	lettere maiuscole <u>insiemi</u>
a; b; c; ...	lettere minuscole <u>elementi</u>
\in e \notin	Appartiene e Non appartiene
\emptyset o $\{\}$	Insieme vuoto
\subset e $\not\subset$	E' incluso e Non è incluso
\subseteq	contenuto o uguale ad
$=$ e \neq	Uguale e Diverso
\leftrightarrow	Corrispondenza biunivoca
\equiv	Equipotente
\forall	qualsiasi
\cap	Intersezione
\cup	Unione

*Dobbiamo al matematico italiano **Giuseppe Peano** (1858-1932) l'introduzione del simbolo di appartiene a (\in e \notin), il quale nel suo "[Formulario Mathematico](#)" propose quasi tutti i simboli dell'algebra degli insiemi che ancora oggi usiamo.*

L'insieme dei numeri naturali (N)

I numeri che fine dalle origini sono serviti all'uomo per "contare" gli elementi di un insieme si dicono numeri naturali e costituiscono un l'insieme numerico **N**.

I numeri qualsiasi appartenenti a **N** si indicano, in ossequio alla scrittura formulata per gli insiemi, con lettere minuscole dell'alfabeto. Alcune lettere sono più usate di altre: ricordiamo:

n	numero ennesimo o qualsiasi
i	numero iesino
x, y, z	usati come incognite o numeri qualsiasi e per le coordinate cartesiane 2D e 3D

L'insieme **N** è **infinito** [$n(N)=\infty$] ed **ordinato**. Per ogni numero naturale n qualsiasi si può stabilire il suo precedente ($n-1$) e il suo successivo ($n+1$)

In generale, dato un numero n si ha $(n-1) < n < (n+1)$

Unica eccezione lo zero che non ha precedente.

Noi ci occuperemo solamente dei numeri cardinali, mentre gli ordinali (primo, secondo, ...) non sono utilizzati per il calcolo aritmetico.

L'insieme presenta due sottoinsiemi particolari e noti: l'insieme dei **numeri pari**, che terminano con cifra pari, e dei **numeri dispari**, terminano con cifra dispari.

L'insieme **N** si dice chiuso riferendosi ad un'operazione quando questa dà come risultato un numero che appartiene all'insieme **N**. Si dice anche che questa operazione è interna.

Altri insiemi numerici

Oltre all'insieme **N** dei numeri naturali esistono altri insiemi numerici.

L'insieme dei numeri razionali (Q): frazioni e numeri con la virgola, sia decimali finiti ($1 \div 2 = 0,5$ resto 0) che periodici ($1 \div 3 = 0,33333... = 0,\overline{3}$), sia semplici sia misti, tutti comunque riconducibili a **frazioni**.

L'insieme dei numeri relativi (Z): numeri positivi e negativi.

I numeri privi di segno sottintendono un segno positivo. Sono tipici risultati di sottrazioni dove in sottraendo è maggiore del minuendo.

$$(+)\ 3 + (-)\ 8 = 3 - 8 = -5$$

L'insieme dei numeri irrazionali (I): numeri illimitati non periodici non riconducibili ad una frazione generatrice. In generale dati dalla radice di un numero non potenza perfetta (es. $\sqrt{2}$).

L'insieme dei numeri reali (R) che comprende gli insiemi numerici precedenti.

L'insieme dei numeri algebrici e trascendenti (sono famosi π ed e).

L'insieme dei numeri complessi.